# Epreuve de mathématiques 1
# 2022-2023

*L'usage de la calculatrice n'est pas autorisé*
*Durée : 3h*

*Encadrer les résultats et numéroter les copies*

## Problème 1 - Fonctions réelles

On considère la fonction
$$f : x \mapsto \frac{x}{1+\ln(x)}$$

1. Déterminer $\mathscr{D}_f$ le domaine de définition de $f$.
2. On rappelle que $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(x)}{x} = 0$. En déduire proprement $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.
3. Calculer la dérivée de $f$.
4. Déterminer le tableau de variations complet de $f$.
5. Préciser, sans justifier, les ensembles suivants :

$$\text{a) } f\left(]0;1]\right) \text{ ?} \qquad \text{b) } f\left(\left]\mathrm{e}^{-1};\mathrm{e}\right]\right) \text{ ?} \qquad \text{c) } f^{\leftarrow}\left(\mathbb{R}_+\right) \text{ ?} \qquad \text{d) } f^{\leftarrow}\left(\mathbb{R}_-\right) \text{ ?}$$

6. Préciser le comportement asymptotique de $f$ en $+\infty$.
7. Tracer l'allure du graphe de la fonction $f$.
8. La fonction $f : \mathscr{D}_f \to \mathbb{R}$ est-elle injective ? surjective ? bijective ? Justifier rigoureusement.
9. Justifier que la fonction $f$ restreinte à l'ensemble $[1;+\infty[$ définit une bijection dans un ensemble que l'on précisera.
10. Préciser l'équation de $\mathcal{T}$ la tangente à $f$ au point $x = \mathrm{e}$.
11. Déterminer sur son domaine de définition le signe de la fonction $g : x \mapsto \frac{x}{1+\ln(x)} - \frac{x+\mathrm{e}}{4}$.
12. Préciser la position relative de $\mathcal{T}$ par rapport au graphe de $f$.

## Problème 2 - Logique

Pour $f \in \mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, on considère les prédicats suivants :

$$\begin{aligned} &A(f) : \text{« } f \text{ est convexe sur } \mathbb{R} \text{ »}\\ &B(f) : \text{« } f \text{ converge en } +\infty \text{ »}\\ &C(f) : \text{« } f \text{ est décroissante sur } \mathbb{R} \text{ »}\\ &D(f) : \text{« } f \text{ est minorée sur } \mathbb{R} \text{ ».}\end{aligned}$$

On donne/rappelle la définition de la convexité :

$$A(f) : \text{« } \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ \forall t \in [0;1], \qquad f(tx+(1-t)y) \leqslant tf(x) + (1-t)f(y). \text{ »}$$

### Partie 1 : Echauffement

Soit $f \in \mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$.

1. Définir avec des quantificateurs les assertions $C(f)$ et $D(f)$.
2. Enoncer leur négation.

3. Enoncer une implication entre $B(f)$, $C(f)$ et $D(f)$.
4. Enoncer sa réciproque, sa négation et sa contraposée en fonction de $B(f)$, $C(f)$, $D(f)$, $\overline{B(f)}$, $\overline{C(f)}$ et/ou $\overline{D(f)}$.
5. Montrer que la réciproque est fausse en générale. Que dire de la valeur de vérité de la négation et de la contraposée ?

On pose également

$$A'(f) : « \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \qquad f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leqslant \frac{f(x)+f(y)}{2}. »$$

6. Enoncer $\overline{A'(f)}$.
7. Montrer que $A(f) \Rightarrow A'(f)$.

## Partie 2 : Un exemple de fonction convexe

On suppose dans cette partie que $f : x \mapsto x^2$ est la fonction carrée.

8. Donner la valeur de vérité de $B(f)$, $C(f)$, $D(f)$.

On fixe $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ et on pose

$$h : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & tx^2 + (1-t)\,y^2 - (tx+(1-t)y)^2 \end{array}$$

9. Montrer que
$$\exists \alpha_{x,y} \in \mathbb{R},\ \forall t \in \mathbb{R}, \qquad h(t) = \alpha_{x,y}\left(t - t^2\right),$$
où $\alpha_{x,y}$ est un réel dépendant éventuellement de $x$ et $y$ mais pas de $t$ que l'on précisera.
10. Déterminer suivant les valeurs de $x$ et $y$ les limites de $h$ en $+\infty$ et $-\infty$.
11. Déterminer le tableau de variations complet de $h$.
12. En déduire le signe de $h$ sur $[0;1]$.
13. Conclure que la fonction carrée est convexe.

## Partie 3 : Etude des fonctions convexes convergentes

On reprend $f$ une fonction quelconque mais on suppose dans cette partie $A(f) \cap B(f)$ réalisée. On note alors $\ell = \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

14. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) \geqslant \ell$. Quelle assertion en déduit-on ?
15. On suppose qu'il existe $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $a \leqslant b$ et $f(a) < f(b)$. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $y_n = a + n\,(b-a)$ et $t_n = \frac{n-1}{n}$. Justifier que
$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad f(b) \leqslant t_n f(a) + (1-t_n)\, f(y_n).$$
16. En déduire que
$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad f(b) \leqslant f(y_n).$$
17. En déduire que $f(b) \leqslant \ell$ puis aboutir à une contradiction.
18. Justifier que $A(f) \cap B(f) \Rightarrow C(f)$. Quel type de raisonnement a-t-on utilisé ?

## Partie 4 : Une récurrence alternative

On fixe dans cette partie $f \in \mathscr{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ une fonction **convexe** sur $\mathbb{R}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on considère

$$\mathscr{P}(n) : \text{« } \forall (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n,\ f\left(\frac{x_1 + \cdots + x_n}{n}\right) \leqslant \frac{f(x_1) + \cdots + f(x_n)}{n} \text{ »}.$$

19. Justifier que $\mathscr{P}(1)$ et $\mathscr{P}(2)$ sont vraies.
20. Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Supposons $\mathscr{P}(k+1)$ vraie. Soient $(x_1, \ldots, x_k) \in \mathbb{R}^k$. Posons
$$x_{k+1} = \frac{x_1 + \cdots + x_k}{k}.$$
   (a) Simplifier $\frac{x_1+\cdots+x_{k+1}}{k+1}$.
   (b) En déduire que
$$f\left(\frac{x_1 + \cdots + x_k}{k}\right) \leqslant \frac{f(x_1) + \cdots + f(x_k) + f\left(\frac{x_1+\cdots+x_k}{k}\right)}{k+1}.$$
   (c) Conclure que $\mathscr{P}(k)$ est vraie.
21. Soit $m \in \mathbb{N}^*$. Pour tout $k \in [\![1; m]\!]$, on pose $\mathscr{Q}(k) = \mathscr{P}(m - k + 1)$. A l'aide des propositions $\mathscr{Q}$ et de la question précédente montrer l'implication suivante
$$\mathscr{P}(m) \qquad \Rightarrow \qquad (\forall k \in [\![1; m]\!],\ \mathscr{P}(k))$$
22. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que $\mathscr{P}(n) \ \Rightarrow\ \mathscr{P}(2n)$.
23. Conclure que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathscr{P}(n)$ est vraie.